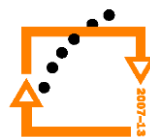


# KOMPLEXNÍ ČÍSLA

---

**Gymnázium Jiřího Wolкера v Prostějově**  
**Výukové materiály z matematiky pro vyšší gymnázia**  
**Autoři projektu Student na prahu 21. století - využití ICT ve**  
**vyučování matematiky na gymnáziu**



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

**Prostějov 2009**

## Úvod

Vytvořený výukový materiál pokrývá předmět matematika, která je vyučována v osnovách a tematických plánech na gymnáziích nižšího a vyššího stupně. Mohou ho však využít všechny střední a základní školy, kde je vyučován předmět matematika, a které mají dostatečné technické vybavení a zázemí.

### Cílová skupina:

Podle chápání a schopností studentů je stanovena úroveň náročnosti vzdělávacího plánu a výukových materiálů. Zvláště výhodné jsou tyto materiály pro studenty s individuálním studijním plánem, kteří se nemohou pravidelně zúčastňovat výuky. Tito studenti mohou s pomocí našich výukových materiálů částečně kompenzovat svou neúčast ve vyučovaném předmětu matematika, formou e-learningového studia.

## Obsah

Komplexní čísla.....	5
Základní vlastnosti komplexních čísel .....	5
Základní vlastnosti komplexních čísel .....	7
Varianta A .....	7
Základní vlastnosti komplexních čísel .....	8
Varianta B .....	8
Základní vlastnosti komplexních čísel .....	10
Varianta C .....	10
Geometrické znázornění komplexních čísel.....	12
Geometrické znázornění komplexních čísel.....	14
Varianta A .....	14
Geometrické znázornění komplexních čísel.....	17
Varianta B .....	17
Geometrické znázornění komplexních čísel.....	19
Varianta C .....	19
Goniometrický tvar komplexního čísla .....	21
Komplexní čísla v goniometrickém tvaru .....	23
Varianta A .....	23
Komplexní čísla v goniometrickém tvaru .....	25
Varianta B .....	25
Komplexní čísla v goniometrickém tvaru .....	27
Varianta C .....	27
Rovnice v oboru komplexních čísel .....	29
Rovnice v oboru komplexních čísel .....	30
Varianta A .....	30
Rovnice v oboru komplexních čísel .....	32

Varianta B .....	32
Rovnice v oboru komplexních čísel .....	34
Varianta C .....	34

## Komplexní čísla

### Základní vlastnosti komplexních čísel

Připomeňme základní vlastnosti reálných čísel:

Součet a součin každých dvou reálných čísel je reálné číslo.

Sčítání a násobení reálných čísel je komutativní:

pro všechna  $x, y \in R$  platí:  $x + y = y + x$  a  $xy = yx$ .

Sčítání a násobení reálných čísel je asociativní:

pro všechna  $x, y, z \in R$  platí:  $x + (y + z) = (x + y) + z$  a  $x(yz) = (xy)z$

Násobení reálných čísel je distributivní vzhledem ke sčítání:

pro všechna  $x, y, z \in R$  platí:  $x(y + z) = xy + xz$

Ke každému reálnému číslu  $x$  existuje jediné reálné číslo  $x'$  tak, že platí  $x + x' = 0$ .

Ke každému nenulovému reálnému číslu  $y$  existuje jediné reálné číslo  $y'$  tak, že platí  $y \cdot y' = 1$ .

Je-li součin dvou reálných čísel roven nule, je rovno nule alespoň jedno z nich.

V oboru reálných čísel kvadratická rovnice se záporným diskriminantem nemá řešení. Pokud rozšíříme obor reálných čísel  $R$  na obor komplexních čísel  $C$  ( $R \subset C$ ), můžeme najít všechny kořeny algebraické rovnice jakéhokoli stupně.

### Zavedení komplexních čísel

množinu  $C$  komplexních čísel získáme z množiny  $R$  reálných čísel tak, že k ní přidáme číslo  $i$ , pro které platí  $i^2 = -1$ .

Komplexní číslo  $z \in C$  je číslo ve tvaru  $z = a + bi$ ;  $a, b \in R$ , kde  $i$  je imaginární jednotka, pro kterou platí  $i^2 = -1$ . Číslo  $a$  se nazývá reálná část komplexního čísla  $z$ , číslo  $b$  se nazývá imaginární část komplexního čísla  $z$ . Tento zápis komplexního čísla nazýváme algebraický tvar komplexního čísla.

Je-li  $a = 0 \Rightarrow z = bi$ , pak takové komplexní číslo nazýváme ryze imaginární číslo

Je-li  $b = 0 \Rightarrow z = a$ , pak jde o reálné číslo

**Operace s komplexními čísly**

mějme dvě komplexní čísla v algebraickém tvaru  $z_1 = a + bi$ ;  $z_2 = c + di$ .

Pro součet platí:  $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

Pro rozdíl platí:  $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

Pro součin platí:  $z_1 \cdot z_2 = ac + bci + adi + bdi^2 = ac - bd + (bc + ad)i$

Vydělit komplexní čísla  $\frac{z_1}{z_2}$  znamená vynásobit číslo  $z_1$  číslem převráceným k číslu  $z_2$ .

Dvě komplexní čísla se sobě rovnají, rovnají-li se jejich reálné části ( $a = c$ ) a současně se rovnají jejich imaginární části ( $b = d$ ).

Číslo komplexně sdružené  $\bar{z}$  k číslu  $z = a + bi$  je číslo  $\bar{z} = a - bi$  a platí  $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ .

Platí:  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ;  $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ ;  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ;  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

Pro mocniny imaginární jednotky platí:

$$i^2 = -1; i^3 = i^2 \cdot i = -i; i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1; i^5 = i \cdot i^4 = i \dots$$

$$\boxed{i^{4k} = 1; i^{4k+1} = i; i^{4k+2} = -1; i^{4k+3} = -i; k \in \mathbb{N}}$$

**Absolutní hodnota komplexního čísla**

Absolutní hodnota komplexního čísla  $z = a + bi$  se značí  $|z|$  a je definována vztahem

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Obecně:  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Platí:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \text{ pro } z_2 \neq 0$$

$$|z| = |-z| = |\bar{z}|$$

Komplexní jednotka je komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je 1.

V množině komplexních čísel nelze zavést operaci uspořádání.

## Základní vlastnosti komplexních čísel

### Varianta A

Vypočítejte

$$\frac{3i + 2}{2i - 3}$$

#### **Příklad:**

Rozšíříme zlomek (vynásobíme čitatele i jmenovatele výrazem)  $-2i - 3$

$$\frac{3i + 2}{2i - 3} \cdot \frac{-2i - 3}{-2i - 3} = \frac{6 - 9i - 4i - 6}{4 + 9} = \frac{-13i}{13} = -i$$

#### **Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Výsledek řešení:  $-i$

#### **Příklady k procvičení:**

1.) Vypočítejte:

$$2 + i + 3(7 - i)$$

Řešení:  $23 - 2i$

2.) Vypočítejte:

$$(i - 1)(2i - 3) - i$$

Řešení:  $1 - 6i$

3.) Vypočítejte:

$$(i + 1)(i - 1) + (2i + 1)^2$$

Řešení:  $-5 + 4i$

4.) Vypočítejte:

$$2i^9 - i^{12} + 5i^{16} - 3i^{11}$$

Řešení:  $4 + 5i$

## Základní vlastnosti komplexních čísel

### Varianta B

Vypočítejte:

$$\frac{\frac{i}{2-i} + \frac{1}{i}}{1 + \frac{1}{2i+1}}$$

#### **Příklad:**

Upravíme jednotlivé zlomky v čitateli i jmenovateli rozšířením zlomků

$$\begin{aligned} \frac{\frac{i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} + \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i}}{1 + \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{-2i+1}{-2i+1}} &= \frac{\frac{2i-1-i}{5} - i}{1 + \frac{-2i+1}{5}} = \frac{\frac{2i-1-5i}{5}}{\frac{5-2i+1}{5}} = \frac{-1-3i}{6-2i} \cdot \frac{6+2i}{6+2i} = \\ &= \frac{-6-18i-2i+6}{36+4} = -\frac{1}{2}i \end{aligned}$$

#### **Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Výsledek řešení:  $-\frac{1}{2}i$

#### **Příklady k procvičení:**

1.) Vypočítejte:

$$(2+i) \cdot i + \frac{3+i}{2-i} - 1$$

Řešení:  $3i - 1$

2.) Vypočítejte:

$$\frac{2+i}{i} + \frac{i}{i+1} - \frac{2i+1}{i-1}$$

Řešení: 1



3.) Vypočítejte:

$$-\frac{i-1}{2} - \frac{i}{i-1} \cdot i + 2$$

Řešení:  $2 - i$

4.) Vypočítejte:

$$(5i - 1) : \left(2 - \frac{i+3}{2+i}\right)$$

Řešení:  $1 + 8i$

## Základní vlastnosti komplexních čísel

### Varianta C

Vypočítejte:

$$\frac{\left| \frac{3-4i}{5i} \right| \cdot \left| \frac{1+i}{3-i} \right|}{|2i-1| + |-i|}$$

#### **Příklad:**

Nejprve upravíme oba zlomky v čitateli

$$\begin{aligned} \frac{\left| \frac{3-4i}{5i} \cdot \frac{i}{i} \right| \cdot \left| \frac{1+i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} \right|}{|2i-1| + |-i|} &= \frac{\left| \frac{3i+4}{-5} \right| \cdot \left| \frac{2+4i}{10} \right|}{|2i-1| + |-i|} = \frac{\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} \cdot \sqrt{\frac{4}{100} + \frac{16}{100}}}{\sqrt{4+1} + 1} = \frac{1 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}}{\sqrt{5} + 1} = \\ &= \frac{1}{5 + \sqrt{5}} \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = \frac{5 - \sqrt{5}}{25 - 5} = \frac{5 - \sqrt{5}}{20} \end{aligned}$$

#### **Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Výsledek řešení:  $\frac{5-\sqrt{5}}{20}$

#### **Příklady k procvičení:**

1.) Vypočítejte:

$$|(7+i)(4-3i)|$$

Řešení:  $25\sqrt{2}$

2.) Vypočítejte:

$$\left| \frac{4-2i}{3+i} \right|$$

Řešení:  $\sqrt{2}$

3.) Vypočítejte:

$$\left| \frac{|4 - 3i| + i}{3 - 2i} \right|$$

Řešení:  $\sqrt{2}$

4.) Vypočítejte:

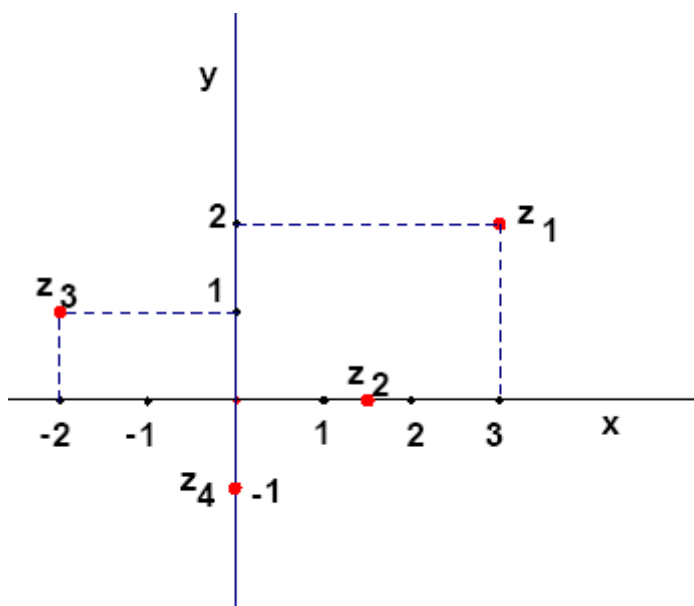
$$\frac{|\sqrt{3} - i| \cdot |i - 1|}{|i(i - 1) - 2i|}$$

Řešení:  $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

### Geometrické znázornění komplexních čísel

Rovina komplexních čísel neboli **Gaussova rovina** je rovina, jejíž body považujeme za obrazy komplexních čísel. Číslu  $z = a + bi$  přiřazujeme bod  $[a; b]$ . Gaussova rovina je tvořena kartézskou soustavou souřadnic  $O_{xy}$ , na jejíž ose  $x$  jsou zobrazena reálná čísla (to znamená čísla  $a + 0i$ ). Tato osa se nazývá reálná osa. Na ose  $y$  jsou zobrazena čísla ryze imaginární (to znamená čísla  $0 + bi$ ). Tato osa se nazývá imaginární osa.

$$z_1 = 3 + 2i; z_2 = 1,5; z_3 = -2 + i; z_4 = -1$$



**Absolutní hodnota komplexního čísla** je rovna vzdálenosti jeho obrazu v Gaussově rovině od počátku soustavy souřadnic.

Absolutní hodnota rozdílu komplexních čísel určuje jejich vzdálenost v Gaussově rovině.

### Komplexní čísla jako vektory

Komplexní čísla lze v Gaussově rovině znázornit i jako vektory. Libovolnému komplexnímu číslu  $z$  přiřadíme vektor  $\vec{u} = \overrightarrow{OZ}$ , kde  $O$  je počátek a  $Z$  obraz komplexního čísla  $z$ . Komplexní čísla tedy můžeme graficky sčítat a násobit reálným číslem tak, že je zobrazíme v Gaussově rovině jako vektory, s nimiž pak jako s vektory pracujeme.

Součin a podíl komplexních čísel v Gaussově rovině znázorníme pomocí geometrických zobrazení otočení a stejnolehlosti což si ukážeme na příkladě.



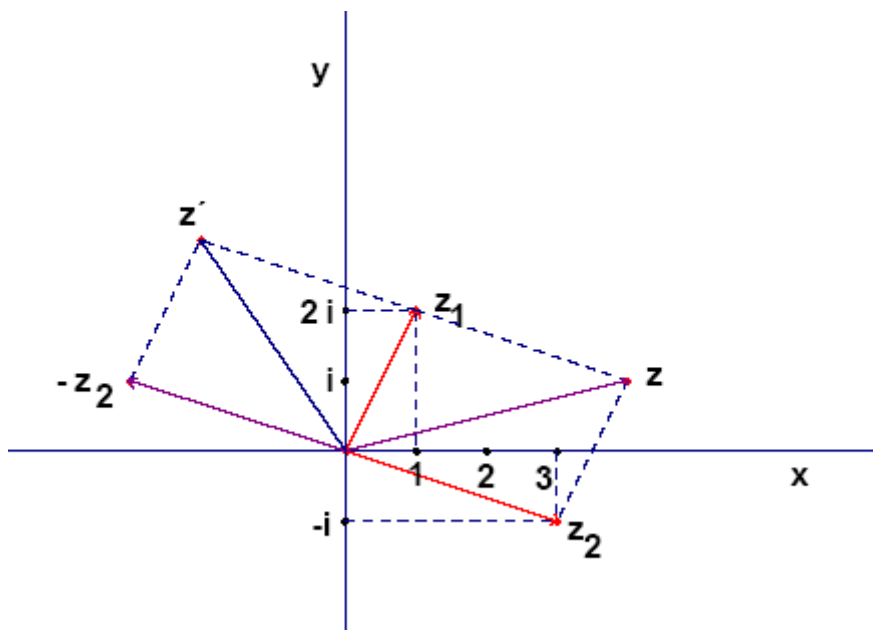
## Geometrické znázornění komplexních čísel

### Varianta A

Nakreslete obrazy komplexních čísel  $z_1 = 1 + 2i$ ;  $z_2 = 3 - i$ . Potom graficky určete

a)  $z = z_1 + z_2$    b)  $z' = z_1 - z_2$

*Příklad:*



*Příklad:*

[Varianta A](#)

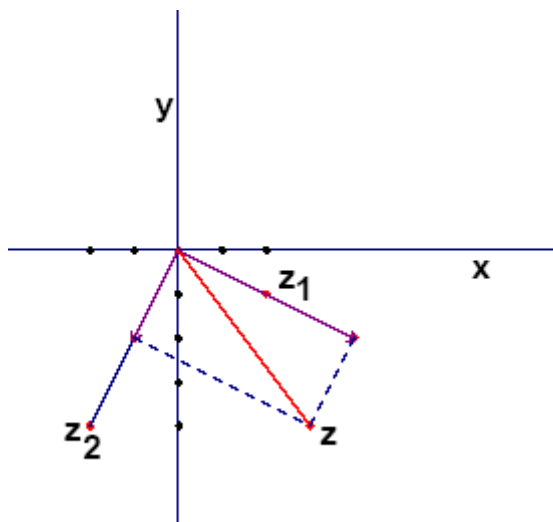
[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

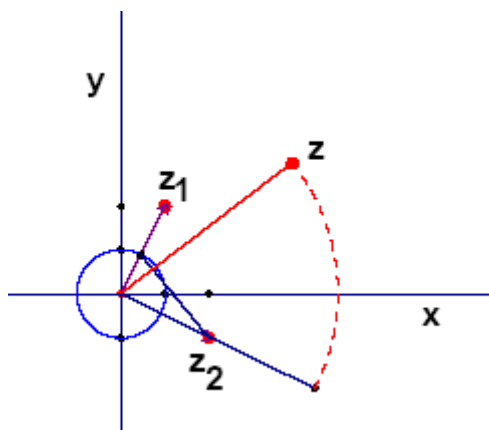
- 1.) Nakreslete obrazy komplexních čísel  $z_1 = 2 - i$ ;  $z_2 = -2 - 4i$ . Potom graficky určete  $z = 2z_1 + \frac{1}{2}z_2$ .

Řešení:

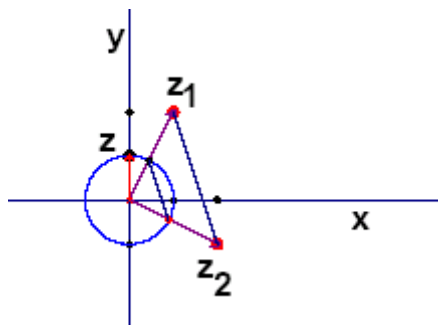


- 2.) Nakreslete obrazy komplexních čísel  $z_1 = 1 + 2i$ ;  $z_2 = 2 - i$ . Potom graficky určete  $z = z_1 \cdot z_2$ .

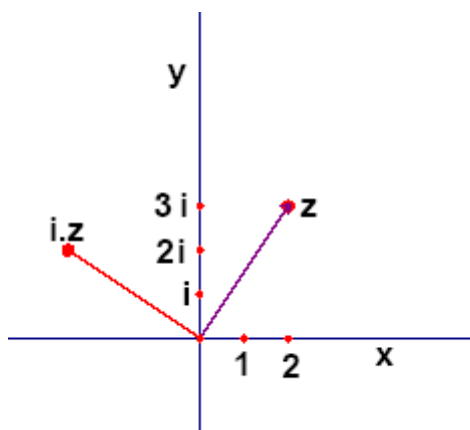
Řešení:



3.) Nakreslete obrazy komplexních čísel  $z_1 = 1 + 2i$ ;  $z_2 = 2 - i$ . Potom graficky určete  $z = z_1 : z_2$ .



4.) Nakreslete obraz komplexního čísla  $z = 2 + 3i$ . Potom graficky určete  $i \cdot z$ .





## Geometrické znázornění komplexních čísel

### Varianta B

Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel  $z$ , pro která platí

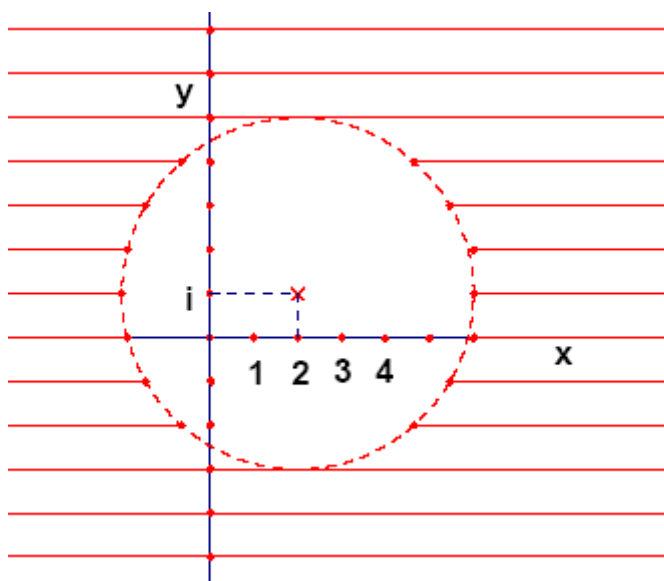
$$|z - 2 - i| > 4$$

#### *Příklad:*

Nerovnici upravíme na tvar

$$|z - (2 + i)| > 4$$

Hledáme tedy všechna komplexní čísla, jejichž obrazy v Gaussově rovině mají od obrazu komplexního čísla  $2 + i$  vzdálenost větší než 4.



#### *Příklad:*

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Výsledek řešení: vnější oblast kruhu o poloměru 4 a středu o souřadnicích  $[2; i]$

**Příklady k procvičení:**

1.) Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel  $z$ , pro která platí

$$|z| = 3$$

Řešení: kružnice, střed  $[0; 0]$ , poloměr 3

2.) Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel  $z$ , pro která platí

$$|z - i| = 1$$

Řešení: kružnice, střed  $[0; i]$ , poloměr 1

3.) Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel  $z$ , pro která platí

$$|z - 1 + i| = 2$$

Řešení: kružnice, střed  $[1; -i]$ , poloměr 2

4.) Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel  $z$ , pro která platí

$$|z - 2| \leq 3$$

Řešení: kruh, střed  $[2; 0]$ , poloměr 3

## Geometrické znázornění komplexních čísel

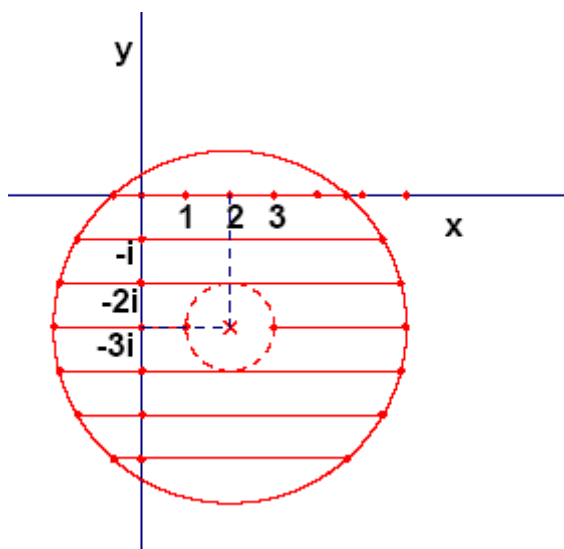
### Varianta C

Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel  $z$ , pro která platí

$$1 < |z + 3i - 2| \leq 4$$

**Příklad:**

výpočet v editoru rovnic



**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Výsledek řešení: mezikruží,  $k_1(S_1; r_1)$ ;  $k_2(S_1; r_2)$ ;  $S_1[2; -3i]$ ;

$$r_1 = 1, r_2 = 4$$

**Příklady k procvičení:**

1.) Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel  $z$ , pro která platí

$$|z| = |z - 2 + i|$$

Řešení: osa úsečky s krajními body  $[0; 0]$ ,  $[2; -i]$

2.) Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel  $z$ , pro která platí

$$|z - 1 - 3i| \geq |z + 2i|$$

Řešení: polorovina, hraniční přímkou je osa úsečky s krajními body  $[1; 3i]$ ,  $[0; -2i]$

3.) Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel  $z$ , pro která platí

$$|z - 1| \geq |z + 2i| \wedge |z - 2| < 4$$

Řešení: průnik poloroviny, jejíž hraniční přímkou je osa úsečky s krajními body  $[1; 0]$ ,  $[0; -2i]$ , a kruhu bez hraniční kružnice se středem  $[2; 0]$  a poloměrem 4

4.) Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel  $z$ , pro která platí

$$2 < |z - 1 + 2i| < 7$$

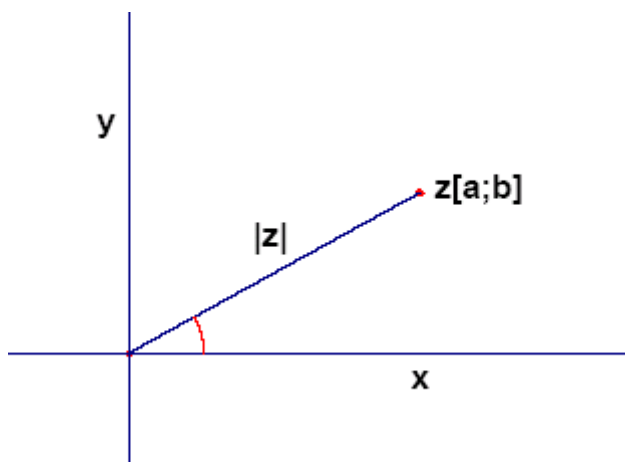
Řešení: mezikruží kružnic  $k_1$  a  $k_2$ ,  $k_1([1; -2]; r = 2)$ ,  $k_2([1; -2]; r = 7)$  bez hraničních kružnic

## Goniometrický tvar komplexního čísla

Goniometrický tvar komplexního čísla  $z \neq 0$  je jeho zápis ve tvaru  $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ .

Číslo  $\varphi$  je argument komplexního čísla  $z$ ,  $|z|$  je jeho absolutní hodnota.

V Gaussově rovině můžeme znázornit komplexní číslo na základě znalosti jeho algebraického tvaru  $z = a + bi$  nebo pomocí jeho vzdálenosti od počátku Gaussovy roviny  $O$  a velikosti orientovaného úhlu  $\varphi$  (argumentu), jehož počáteční rameno je kladná reálná poloosa a koncové rameno polopřímka  $OZ$ .



Pro převod algebraického tvaru  $z = a + bi$  komplexního čísla na tvar goniometrický platí:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

### Operace s komplexními čísly v goniometrickém tvaru

Komplexní čísla v goniometrickém tvaru lze velmi snadno násobit, dělit, umocňovat a odmocňovat. Sčítat a odčítat je výhodnější v algebraickém tvaru.

Součin:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Větu o násobení lze rozšířit pro libovolný počet činitelů.

Podíl:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Umocnění pro  $n \in \mathbb{N}$ :

$$[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Speciálním případem je Moivreova věta platná pro komplexní jednotky:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Odmocnění:

Nechť  $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$  je libovolné nenulové komplexní číslo a  $n$  je přirozené číslo.

Pak existuje právě  $n$  různých hodnot komplexní  $n$ -té odmocniny čísla  $z$ . Jsou jimi komplexní čísla vyjádřená v goniometrickém tvaru vzorcem

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \cdot \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right], \text{ kde } k = 0; 1; \dots, n - 1$$

Všechny  $n$ -té odmocniny čísla  $z$  mají stejnou absolutní hodnotu  $\sqrt[n]{|z|}$ , ale liší se o celistvé násobky čísla  $\frac{2k\pi}{n}$ . Proto pro jejich obrazy v Gaussově rovině platí, že leží ve vrcholech pravidelného  $n$ -úhelníku, který je vepsaný do kružnice se středem v počátku Gaussovy roviny  $O$  a o poloměru  $r = \sqrt[n]{|z|}$ .

## Komplexní čísla v goniometrickém tvaru

### Varianta A

Převeďte na goniometrický tvar komplexní číslo

$$z = \sin 30^\circ + i \cos 30^\circ$$

#### **Příklad:**

Převědeme číslo na algebraický tvar

$$z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nyní budeme převádět na tvar goniometrický.

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1; \cos \varphi = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Hledaný tvar komplexního čísla tedy je

$$z = 1 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

#### **Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Výsledek řešení:  $z = 1 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

#### **Příklady k procvičení:**

1.) Převeďte na goniometrický tvar komplexní číslo

$$z = -2 + 2i\sqrt{3}$$

Řešení:  $4 \left( \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)$

2.) Převeďte na goniometrický tvar komplexní číslo

$$z = -\sqrt{3} + i$$

Řešení:  $2 \left( \cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right)$

3.) Převed'te na goniometrický tvar komplexní číslo

$$z = -7 - 7i$$

Řešení:  $7\sqrt{2} \left( \cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi \right)$

4.) Převed'te na goniometrický tvar komplexní číslo

$$z = 10 - 10i$$

Řešení:  $10\sqrt{2} \left( \cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right)$



## Komplexní čísla v goniometrickém tvaru

### Varianta B

Upravte a výsledek zapište v goniometrickém tvaru

$$z = \frac{i - 3}{2 + i}$$

#### **Příklad:**

Rozšíříme zlomek výrazem  $2 - i$

$$z = \frac{i - 3}{2 + i} \cdot \frac{2 - i}{2 - i} = \frac{2i + 1 - 6 + 3i}{4 + 1} = \frac{5i - 5}{5} = -1 + i$$

Nyní toto komplexní číslo převedeme na goniometrický tvar

$$|z|\sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{3}{4}\pi$$

Hledaný goniometrický tvar zadaného komplexního čísla je

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$$

#### **Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Výsledek řešení:  $z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$

#### **Příklady k procvičení:**

1.) Upravte a výsledek zapište v goniometrickém tvaru

$$z = \frac{-1 + 2i}{1 + 3i}$$

Řešení:  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

2.) Upravte a výsledek zapište v goniometrickém tvaru

$$z = \frac{1 + i}{1 - i}$$

Řešení:  $z = 1 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

3.) Upravte a výsledek zapište v goniometrickém tvaru

$$z = \frac{i - 2}{4i - 8}$$

Řešení:  $z = \frac{1}{4}(\cos 0 + i \sin 0)$

4.) Upravte a výsledek zapište v goniometrickém tvaru

$$z = \frac{3 - i}{1 + 3i}$$

Řešení:  $z = 1 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$

## Komplexní čísla v goniometrickém tvaru

### Varianta C

a) Užitím Moivreovy věty umocněte a výsledek převed'te do algebraického tvaru

$$(1 - i\sqrt{3})^5$$

b) Vypočítejte všechny druhé komplexní odmocniny z čísla  $-4$ .

#### Příklad:

a) převedeme komplexní číslo v závorce na goniometrický tvar

$$|z| = \sqrt{1 + 3} = 2; \cos\varphi = \frac{1}{2}; \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \Rightarrow \varphi = \frac{5}{3}\pi$$

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \cdot \left( \cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right)$$

a použijeme Moivreovu větu

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

$$\begin{aligned} 2^5 \cdot \left( \cos 5 \cdot \frac{5}{3}\pi + i \sin 5 \cdot \frac{5}{3}\pi \right) &= 32 \cdot \left( \cos \frac{25}{3}\pi + i \sin \frac{25}{3}\pi \right) = 32 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 16 + 16\sqrt{3}i \end{aligned}$$

b) Číslo  $-4$  nejprve převedeme na goniometrický tvar

Číslo  $-4$  leží v Gaussově rovině na ose  $x$  v bodě o souřadnicích  $[-4; 0]$ , proto bez dlouhého počítání víme, že argument  $\varphi = \pi$ .

$$-4 = 4 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$$

Nyní hledáme všechny druhé odmocniny komplexního čísla

$$4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Použijeme vzorec

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[ \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right]; k = 0; 1; \dots, n-1$$

Takže

$$x_1 = \sqrt{4} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{2} \right) \right] = 2 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i$$

$$x_2 = \sqrt{4} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{2} \right) \right] = 2 \left( \cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \right) = -2i$$

**Příklad:**[Varianta A](#)[Varianta B](#)[Varianta C](#)

Výsledek řešení: a)  $16 + 16\sqrt{3}i$  ; b)  $x_{1,2} = \pm 2i$

**Příklady k procvičení:**

1.) Užitím Moivreovy věty umocněte a výsledek převedte do algebraického tvaru

$$(-2\sqrt{3} - 2i)^{12}$$

Řešení:  $2^{24}$

2.) Užitím Moivreovy věty umocněte a výsledek převedte do algebraického tvaru

$$(1 + i)^6$$

Řešení:  $-8i$

3.) Vypočítejte všechny páté komplexní odmocniny z čísla 32.

Řešení:  $z_{1,2,3,4,5} = 2 \left( \cos \frac{2}{5} k\pi + i \sin \frac{2}{5} k\pi \right), k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

4.) Vypočítejte součet všech třetích komplexních odmocnin z čísla  $-2$ .

Řešení: 0

## Rovnice v oboru komplexních čísel

### Binomická rovnice

Binomická rovnice je rovnice ve tvaru  $x^n - z = 0$ , kde  $z$  je komplexní číslo,  $x$  je neznámá z oboru  $\mathbb{C}$  a  $n$  je přirozený exponent.

Kořeny binomické rovnice získáme jako  $n$ -té odmocniny komplexního čísla  $z$ .

Binomická rovnice

$$x^n - |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 0$$

má v oboru komplexních čísel právě  $n$  různých kořenů:

$$x_k = \sqrt[n]{z} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k = 0; 1; \dots; n - 1$$

### Kvadratické rovnice s reálnými kořeny a záporným diskriminantem

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

tato rovnice má v oboru komplexních čísel právě dva kořeny, a to komplexně sdružená imaginární čísla:

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}; x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}$$

### Kvadratické rovnice s komplexními koeficienty

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$$

tato rovnice má v oboru komplexních čísel právě dva kořeny pro diskriminant  $D \neq 0$ , a to čísla

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|} \cdot \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{2a}$$

kde  $\alpha$  je argument jejího diskriminantu, a pouze jeden kořen

$$x = -\frac{b}{2a}$$

pro  $D = 0$ .

## Rovnice v oboru komplexních čísel

### Varianta A

Řešte rovnice

a)  $x, y \in \mathbb{R}$

$$x(y + i) + y(x - i) = 2x + 2yi$$

b)  $z \in \mathbb{C}$

$$(z + i)(z - 3i) = z(z - i)$$

c)  $z \in \mathbb{C}$

$$2z + 3\bar{z} = 5 + i$$

### Příklad:

a) upravíme pravou stranu rovnice a budeme porovnávat (dvě komplexní čísla se sobě rovnají, pokud mají stejnou reálnou a stejnou imaginární část)

$$xy + xi + xy - yi = 2x + 2yi$$

$$2xy + i(x - y) = 2x + 2yi$$

Odtud plyne

$$2xy = 2x \quad \wedge \quad x - y = 2y$$

$$2xy - 2x = 0 \quad \wedge \quad x = 3y$$

$$2x(y - 1) = 0 \quad \wedge \quad x = 3y$$

Z první rovnice plyne

$$x = 0 \quad \vee \quad y = 1$$

Úloha má tedy dvě řešení

$$x = 0 \quad \wedge \quad y = 0 \quad \vee \quad x = 3 \quad \wedge \quad y = 1$$

b) roznásobíme členy

$$z^2 - 2zi + 3 = z^2 - zi$$

$$3 = zi$$

$$z = \frac{3}{i}$$

$$z = \frac{3}{i} \cdot \frac{i}{i} = -3i$$

c) do rovnice dosadíme  $z = a + bi$ ,  $\bar{z} = a - bi$

$$2(a + bi) + 3(a - bi) = 5 + i$$

$$5a - bi = 5 + i$$

Dvě komplexní čísla se sobě rovnají, pokud se rovnají jejich reálné části i jejich imaginární části. Proto platí

$$5a = 5 \wedge -b = 1 \Rightarrow a = 1 \wedge b = -1$$

Řešení rovnice tedy je

$$z = 1 - i$$

**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Výsledek řešení: a)  $x = 0 \wedge y = 0 \vee x = 3 \wedge y = 1$  b)  $z = -3i$ ,  
c)  $z = 1 - i$

**Příklady k procvičení:**

1.) Určete reálná čísla  $x, y \in R$  tak, aby platilo

$$2x + yi = 4 - 3i$$

Řešení:  $x = 2 \wedge y = -3$

2.) Řešte rovnici s neznámou  $z \in C$

$$z = 3i(z - i) - 5z$$

Řešení:  $z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

3.) Řešte rovnici s neznámou  $z \in C$

$$\left(2 - \frac{1}{i}\right)\bar{z} - 13 = 2(6,5i - z)$$

Řešení:  $z = 13 - 39i$

4.) Řešte rovnici s neznámou  $z \in C$

$$z(\bar{z} - 4) - 1 = 8i$$

Řešení:  $z_1 = 1 - 2i; z_2 = 3 - 2i$

## Rovnice v oboru komplexních čísel

### Varianta B

Řešte kvadratickou rovnici s neznámou  $x \in \mathbb{C}$

$$x(3 - x) = 3 - i$$

#### *Příklad:*

Roznásobíme levou stranu a převedeme všechny členy rovnice doleva

$$x^2 - 3x + 3 - i = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - i)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{4i - 3}}{2}$$

Vyřešíme nejprve odmocninu

$$\sqrt{4i - 3} = a + bi$$

Rovnici umocníme a dále budeme řešit porovnáváním dvou komplexních čísel

$$4i - 3 = a^2 - b^2 + 2abi$$

Dvě komplexní čísla se sobě rovnají, pokud mají stejnou reálnou část a stejnou imaginární část.

$$a^2 - b^2 = -3$$

$$2ab = 4$$

Řešíme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Z druhé rovnice vyjádříme jednu neznámou a dosadíme do rovnice první

$$a = \frac{2}{b}$$

$$\left(\frac{2}{b}\right)^2 - b^2 = -3$$

$$4 - b^4 = -3b^2$$

Zavedeme substituci  $k = b^2$  a dostaneme rovnici

$$k^2 - 3k - 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 4; k_2 = -1$$



Protože  $a, b \in R$ , přichází v úvahu pouze řešení  $k_1 = 4$ . Dopočítáme tedy  $a, b$ .

$$a_1 = 1, b_1 = 2 \quad \vee \quad a_2 = -1, b_2 = -2$$

Dosadíme tedy do vzorce pro výpočet kořenů  $x_{1,2}$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm (1 + 2i)}{2}$$
$$x_1 = \frac{3 + 1 + 2i}{2} = 2 + i$$
$$x_2 = \frac{3 - 1 - 2i}{2} = 1 - i$$

**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Výsledek řešení:  $x_1 = 2 + i$ ;  $x_2 = 1 - i$

**Příklady k procvičení:**

1.) Řešte kvadratickou rovnici s neznámou  $x \in C$

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

Řešení:  $\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$

2.) Řešte kvadratickou rovnici s neznámou  $x \in C$

$$x^2 + x(2 - i) + 3 - i = 0$$

Řešení:  $-1 + 2i$ ;  $-1 - i$

3.) Řešte kvadratickou rovnici s neznámou  $x \in C$

$$ix^2 - 3x + 4i = 0$$

Řešení:  $-4i$ ;  $i$

4.) Řešte kvadratickou rovnici s neznámou  $x \in C$

$$x^2 - 20 = ix(2i - x)$$

Řešení:  $3 - i$ ;  $-4 + 2i$

## Rovnice v oboru komplexních čísel

### Varianta C

Řešte rovnici s neznámou  $x \in \mathbb{C}$ . Výsledky запиšte v goniometrickém tvaru.

$$(ix)^4 + \sqrt{3} - i = 0$$

#### **Příklad:**

Vyjádríme z rovnice  $x^4$

$$x^4 = -\sqrt{3} + i$$

Hledáme tedy všechny čtvrté komplexní odmocniny z čísla  $z = -\sqrt{3} + i$ .

Převédeme toto komplexní číslo na goniometrický tvar

$$|z| = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2; \cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sin \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5}{6}\pi$$

$$z = 2 \left( \cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right)$$

Čtvrté komplexní odmocniny z tohoto čísla jsou

$$x_1 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{5}{24}\pi + i \sin \frac{5}{24}\pi \right)$$

$$x_2 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{17}{24}\pi + i \sin \frac{17}{24}\pi \right)$$

$$x_3 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{29}{24}\pi + i \sin \frac{29}{24}\pi \right)$$

$$x_4 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{41}{24}\pi + i \sin \frac{41}{24}\pi \right)$$

#### **Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Výsledek řešení:  $x_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{2} \left[ \cos \left( \frac{5}{24}\pi + k \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{5}{24}\pi + k \frac{\pi}{2} \right) \right]; k \in \{0; 1; 2; 3\}$

**Příklady k procvičení:**

1.) Řešte rovnici s neznámou  $x \in \mathbb{C}$ . Výsledky zapište v goniometrickém tvaru.

$$x^3 - 64i = 0$$

Řešení:  $x_{1,2,3} = 4 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right]; k \in \{0; 1; 2\}$

2.) Řešte rovnici s neznámou  $x \in \mathbb{C}$ . Výsledky zapište v goniometrickém tvaru.

$$x^3 - 27 = 0$$

Řešení:  $x_{1,2,3} = 3 \left( \cos \frac{2}{3}k\pi + i \sin \frac{2}{3}k\pi \right); k \in \{0; 1; 2\}$

3.) Řešte rovnici s neznámou  $x \in \mathbb{C}$ . Výsledky zapište v goniometrickém tvaru.

$$x^3 - 1 - i = 0$$

Řešení:  $x_{1,2,3} = \sqrt[6]{2} \left[ \cos \left( \frac{1}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi \right) + i \sin \left( \frac{1}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi \right) \right]; k \in \{0; 1; 2\}$

4.) Řešte rovnici s neznámou  $x \in \mathbb{C}$ . Výsledky zapište v goniometrickém tvaru.

$$(2x)^5 - 16 = 16i\sqrt{3}$$

Řešení:  $x_{1,2,3,4,5} = 1 \cdot \left[ \cos \left( \frac{1}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi \right) + i \sin \left( \frac{1}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi \right) \right]; k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$